первого рода, а плоскость $\mathcal{N}_{n-r-2}(A_0)=[\mathcal{L}_\alpha=A_\alpha+\nu^0_\alpha A_0, \mathcal{L}_i]$ - нормаль второго рода, условия инвариантности которых имеют соответственно вид:

$$\begin{cases} \nabla\nu^i_n+\omega^i_n=\nu^i_{nK}\,\omega^K_0, & \nabla\nu^\alpha_n+\omega^\alpha_n=\nu^\alpha_{nK}\,\omega^K_0, \\ \nabla\nu^0_i+\omega^0_i=\nu^0_{iK}\,\omega^K_0, & \nabla\nu^0_\alpha+\omega^0_\alpha=\nu^0_{\alpha K}\,\omega^K_0; \end{cases} \qquad (4.6)$$

б) $\mathcal{H}_{n-m-1}$: плоскость $N_{m+1}(A_0)=[A_0, \mathcal{L}_a, \hat{\mathcal{X}}_n]$ - нормаль первого рода, плоскость $\mathcal{N}_{n-m-2}(A_0)=[\mathcal{L}_\alpha]$ - нормаль второго рода;

в) $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$: плоскость $N_{\ell+1}(A_0)=[A_0, \mathcal{L}_i, \hat{\mathcal{X}}_n]$ - нормаль первого рода, плоскость $\mathcal{N}_{n-\ell-2}(A_0)=[\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_\alpha]$ - нормаль второго рода;

г) $\mathcal{H}_m$: плоскость $N_{n-m}(A_0)=[X_{n-m-1}, \hat{\mathcal{X}}_n]$ - нормаль первого рода, плоскость $\mathcal{N}_{m-1}(A_0)=[\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_i]$ - нормаль второго рода;

д) $\mathcal{H}_{n-1}$: прямая $N_1(A_0)=[A_0, \hat{\mathcal{X}}_n]$ - нормаль первого рода, плоскость $\mathcal{N}_{n-2}(A_0)=[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_\alpha]$ - нормаль второго рода.

Охваты объектов $\{\nu^p_n\}, \{\nu^i_n\}, \{\nu^\alpha_n\}, \{\nu^0_p\}, \{\nu^0_\alpha\}, \{\nu^0_i\}$, которые участвуют в определении полей нормалей первого и второго рода основных структурных распределений (см. а) - г)), можно осуществить в окрестности первого порядка с помощью соответственно квазитензоров (2.17), (2.20), (2.21), а в окрестности второго порядка с помощью соответственно квазитензоров (2.18) (2.22).

Библиографический список

1. П о п о в Ю.И. Скомпонованные трехсоставные распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып. 20. С.73-96.

2. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

3. Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация / Докл. АН Арм. ССР. 1959. Т.28. № 4. С.151-157.

4. Н о р д е н А.П. Теория композиций // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.117-145.

5. П о п о в Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства /Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. 181 с. Деп. в ВИНИТИ. 5.11.90. № 5625-В90 Деп.

6. П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. 126 с. Библиогр. 20 назв. Деп. в ВИНИТИ 16.12.82. № 6192-82.

7. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

8. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.29-48.

9. П о х и л а М.М. Обобщенные многомерные полосы // Тез. докл. 6-й Всесоюз. конф. по современным проблемам геометрии. Вильнюс, 1975. С.198-199.

10. П о п о в Ю.И. О полях геометрических объектов многомерной распадающейся гиперполосы проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1977. Вып.8. С.43-70.

11. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

12. А к и в и с М.А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.7-31.

УДК 514.75

СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ ГИПЕРКВАДРИКИ ТРЕХСОСТАВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

М.Ф.Г р е б е н ю к

(Киевское авиационное училище)

В данной работе строятся поля инвариантных соприкасающихся гиперквадрик $\mathcal{H}$-распределения [1], [3], причем порядки дифференциальных окрестностей, в которых они построены, существенно зависят от выбора нормали 1-го рода оснащающего H-распределения. Выделены гиперквадрики, определенные в дифференциальной окрестности первого порядка образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения.

Найдены условия касания 2-го порядка соприкасающихся гиперквадрик с кривыми, принадлежащими различным распределениям, ассоциированным с $\mathcal{H}$-распределением. Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [1], [3], обозначения и терминологию которых мы используем в дальнейшем.

1. Введем в рассмотрение следующие объекты 1-го порядка:

$$K_{\alpha\beta}=H_{\alpha\beta}-H_{\alpha i}M_{j\beta}M^{ij},\quad \nabla K_{\alpha\beta}+K_{\alpha\beta}\omega^{n+1}_{n+1}=K_{\alpha\beta x}\omega^{x}. \qquad (1)$$

Рассмотрим определитель $K_0=\det\|K_{\alpha\beta}\|$. В общем случае $K_0\neq 0$. Это позволяет ввести обращенный тензор 1-го порядка $\{K^{\beta\gamma}\}$, который определяется соотношениями

$$K^{\alpha\beta}K_{\beta\gamma}=K^{\beta\alpha}K_{\gamma\beta}=\delta^{\alpha}_{\gamma},\quad \nabla K^{\alpha\beta}-K^{\alpha\beta}\omega^{n+1}_{n+1}=K^{\alpha\beta}_{x}\omega^{x}.$$

В дифференциальной окрестности 1-го порядка образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения построим следующие величины:

$$\mathcal{L}^{\alpha}=-(H_{\beta n+1}-H_{\beta i}M_{j,n+1}M^{ij})K^{\alpha\beta},\quad \mathcal{L}^{j}=-(M_{i,n+1}+M_{i\alpha}\mathcal{L}^{\alpha})M^{ji},$$

$$\mathcal{L}^{p}=-(\Lambda_{qn+1}+\Lambda_{qi}\mathcal{L}^{i}+\Lambda_{q\alpha}\mathcal{L}^{\alpha})\Lambda^{pq}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что система величин $\{\mathcal{L}^{\sigma}\}=\{\mathcal{L}^{p},\mathcal{L}^{i},\mathcal{L}^{\alpha}\}$ образует квазитензор 1-го порядка:

$$\nabla\mathcal{L}^{\sigma}=\mathcal{L}^{\sigma}\omega^{n+1}_{n+1}-\omega^{\sigma}_{n+1}+\hat{\mathcal{L}}^{\sigma}_{x}\omega^{x}.$$

Поле геометрического объекта $\{\mathcal{L}^{\sigma}\}$ задает инвариантное поле аффинной нормали $\mathcal{L}=[M,\vec{\ell}]$ $\mathcal{H}$-распределения, где $\vec{\ell}=\mathcal{L}^{\sigma}\vec{e}_{\sigma}+\vec{e}_{n+1}$. Доказано, что при смещении центра M $\mathcal{H}$-распределения вдоль инвариантных кривых, касающихся нормалей $\mathcal{L}$, гиперплоскостной элемент $\Pi_n(M)$ перемещается параллельно.

2. Построим последовательно системы величин:

$$M^{i}_{pq}=a^{i}_{pq}-a^{i}a_{pq},\qquad \nabla M^{i}_{pq}+M^{\alpha}_{pq}\omega^{i}_{\alpha}=M^{i}_{pqx}\omega^{x};$$

$$M^{\alpha}_{pq}=a^{\alpha}_{pq}-a^{\alpha}a_{pq},\qquad \nabla M^{\alpha}_{pq}=M^{\alpha}_{pqx}\omega^{x};$$

$$b^{pq}_{i}=A^{p}_{ir}a^{rq}-\hat{a}_{i}a^{pq},\qquad \nabla b^{pq}_{i}-b^{pq}_{i}\omega^{n+1}_{n+1}=b^{pq}_{ix}\omega^{x};$$

$$b^{p}_{is}=b^{pt}_{i}a_{ts},\qquad \nabla b^{p}_{is}=b^{p}_{isx}\omega^{x};$$

$$b_{ij}=b^{p}_{is}b^{s}_{jp},\qquad \nabla b_{ij}=b_{ijx}\omega^{x};$$

$$b^{\alpha}_{i}=b^{ps}_{i}M^{\alpha}_{ps},\qquad \nabla b^{\alpha}_{i}-b^{\alpha}_{i}\omega^{n+1}_{n+1}=b^{\alpha}_{ix}\omega^{x};$$

$$b^{j}_{i}=b^{ps}_{i}M^{j}_{ps},\qquad \nabla b^{j}_{i}-b^{j}_{i}\omega^{n+1}_{n+1}+b^{\alpha}_{i}\omega^{j}_{\alpha}=b^{j}_{ix}\omega^{x}.$$

Для тензора $\{M^{\alpha}_{ps}\}$ введем обращенный тензор первого порядка $\{\widetilde{M}^{ps}_{\alpha}\}$, который удовлетворяет соотношениям:

$$\widetilde{M}^{ps}_{\alpha}M^{\beta}_{ps}=r\cdot\delta^{\beta}_{\alpha},\quad \widetilde{M}^{pt}_{\alpha}M^{\alpha}_{ps}=(n-m)\,\delta^{t}_{s}$$

и удовлетворяет дифференциальным уравнениям:

$$\nabla\widetilde{M}^{ps}_{\alpha}=\widetilde{M}^{ps}_{\alpha x}\omega^{x}.$$

Введем в рассмотрение относительный тензор второго порядка $\{Q^{j}_{i}\}$:

$$t^{i}_{\alpha}=\frac{1}{r}M^{i}_{ps}\widetilde{M}^{ps}_{\alpha},\qquad \nabla t^{i}_{\alpha}+\omega^{i}_{\alpha}=t^{i}_{\alpha x}\omega^{x};$$

$$\bar{b}^{j}_{i}=t^{j}_{\alpha}b^{\alpha}_{i},\qquad \nabla\bar{b}^{j}_{i}-\bar{b}^{j}_{i}\omega^{n+1}_{n+1}+b^{\alpha}_{i}\omega^{j}_{\alpha}=\bar{b}^{j}_{ix}\omega^{x};$$

$$Q^{j}_{i}=\bar{b}^{j}_{i}-b^{j}_{i},\qquad \nabla Q^{j}_{i}-Q^{j}_{i}\omega^{n+1}_{n+1}=Q^{j}_{ix}\omega^{x}.$$

Для тензора $\{Q^{j}_{i}\}$ введем обращенный тензор $\{\widetilde{Q}^{j}_{i}\}$ второго порядка:

$$Q^{i}_{k}\widetilde{Q}^{k}_{j}=Q^{k}_{j}Q^{i}_{k}=\delta^{i}_{j},\qquad \nabla\widetilde{Q}^{j}_{i}+\widetilde{Q}^{j}_{i}\omega^{n+1}_{n+1}=\widetilde{Q}^{j}_{ix}\omega^{x}.$$

С помощью тензоров $\widetilde{Q}^{j}_{i}$ и b_{ij} определим симметрический тензор второго порядка

$$B_{ij}=\frac{1}{2}(\widetilde{Q}^{k}_{i}b_{kj}+\widetilde{Q}^{k}_{j}b_{ki}),\quad \nabla B_{ij}+B_{ij}\omega^{n+1}_{n+1}=B_{ijx}\omega^{x}. \qquad (2)$$

Тензор B_{ij} в общем случае невырожденный. Квазитензор t^{i}_{α} и тензор B_{ij} дают возможность построить объект $\{B_{ij},B_{i\alpha},B_{\alpha\beta}\}$, где

$$\begin{cases} B_{i\alpha}=-B_{ij}t^{j}_{\alpha}, & \nabla B_{i\alpha}+B_{i\alpha}\omega^{n+1}_{n+1}-B_{ij}\omega^{j}_{\alpha}=B_{i\alpha x}\omega^{x};\\ B_{\alpha\beta}=-B_{i\alpha}t^{i}_{\beta}, & \nabla B_{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta}\omega^{n+1}_{n+1}-B_{i\alpha}\omega^{i}_{\beta}-B_{i\beta}\omega^{i}_{\alpha}=B_{\alpha\beta x}\omega^{x}. \end{cases} \qquad (3)$$

В дифференциальной окрестности второго порядка образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения рассмотрим абсолютный тензор

$$b_{pq}=a^{st}a^{rf}B_{srp}B_{tfq},\qquad \nabla b_{pq}=b_{pqx}\omega^{x}.$$

В общем случае тензор $\{b_{pq}\}$ невырожденный, следовательно, можно ввести обратный ему абсолютный тензор $\{b^{qr}\}$:

$$b_{pq}b^{qr}=\delta^r_p,\qquad \nabla b^{qr}=b^{qr}_x\,\omega^x.$$

Далее, последовательно получим следующие тензоры второго порядка:

$$b^{\alpha q}_p=M^\alpha_{pr}a^{rq},\qquad \nabla b^{\alpha q}_p=b^{\alpha q}_p\,\omega^{n+1}_{n+1}+b^{\alpha q}_{px}\,\omega^x;$$

$$\ell_p=B_{pqs}b^{qs},\qquad \nabla\ell_p=-\ell_p\,\omega^{n+1}_{n+1}+\ell_{px}\,\omega^x; \tag{4}$$

$$\Lambda_{\alpha p}=\ell_p\hat a_\alpha,\qquad \nabla\Lambda_{\alpha p}=-\Lambda_{\alpha p}\,\omega^{n+1}_{n+1}+\Lambda_{\alpha px}\,\omega^x;$$

$$N_q=\Lambda_{\alpha p}b^{\alpha p}_q,\qquad \nabla N_q=N_{qx}\,\omega^x. \tag{5}$$

3. Уравнение соприкасающейся гиперквадрики Q_n относительно некоторого локального репера имеет вид [1]:

$$A_{JK}x^Jx^K+2A_Jx^J+A=0,\qquad A_{JK}=A_{KJ}.$$

Коэффициенты поля соприкасающихся гиперквадрик $\mathcal{H}$-распределения можно охватить компонентами последовательности фундаментальных геометрических объектов распределения различными способами.

Следуя работе А.В.Столярова [2], имеем следующее поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик:

$$a_{pq}x^px^q+a_{ij}x^ix^j+a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+2\Lambda_{pi}x^px^i+2\Lambda_{p\alpha}x^px^\alpha+ \tag{6}$$
$$+2M_{i\alpha}x^ix^\alpha+2\bar p_{a,n+1}x^ax^{n+1}+2\bar p_{\alpha,n+1}x^\alpha x^{n+1}+\bar p_{n+1,n+1}x^{n+1}x^{n+1}-2x^{n+1}=0,$$

где

$$\bar p_{p,n+1}=-(a_{pq}\nu^q-\nu_p+\Lambda_{p\alpha}\nu^\alpha+\Lambda_{pi}\nu^i),\quad \bar p_{i,n+1}=-(a_{ij}\nu^j+\tfrac12 M_{i\alpha}\nu^\alpha+\hat a_i+\Lambda_{pi}\nu^p),$$

$$\bar p_{\alpha,n+1}=-(a_{\alpha\beta}\nu^\beta+\tfrac12 M_{i\alpha}\nu^i+\hat a_\alpha+\Lambda_{p\alpha}\nu^p),\quad \bar p_{n+1,n+1}=2(\nu^i\hat a_i+\nu^\alpha\hat a_\alpha- \tag{7}$$
$$-\nu_p\nu^p+\Lambda_{p\alpha}\nu^p\nu^\alpha+\Lambda_{pi}\nu^p\nu^i)+a_{pq}\nu^p\nu^q+a_{ij}\nu^i\nu^j+a_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta+\tfrac12 M_{i\alpha}\nu^i\nu^\alpha.$$

В отличие от охватов, построенных в работе [2], где зафиксирован квазитензор $\{a^u\}$, для функций (7) мы применяем квазитензор $\{\nu^i,\nu^\alpha\}$, определяющий произвольную внутреннюю инвариантную нормаль первого рода $\mathcal{X}$-распределения.

Аналогично получим еще одно поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик:

$$a_{pq}x^px^q+a_{ij}x^ix^j+a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta+2\Lambda_{pi}x^px^i+2\Lambda_{p\alpha}x^px^\alpha+2M_{i\alpha}x^ix^\alpha+ \tag{8}$$
$$+2\tilde p_{a,n+1}x^ax^{n+1}+2\tilde p_{\alpha,n+1}x^\alpha x^{n+1}+\tilde p_{n+1,n+1}x^{n+1}x^{n+1}-2x^{n+1}=0,$$

где

$$\tilde p_{p,n+1}=-(a_{pq}\nu^q+\Lambda_{p\alpha}\nu^\alpha+\Lambda_{pi}\nu^i),\quad \tilde p_{i,n+1}=-(a_{ij}\nu^j+M_{i\alpha}\nu^\alpha+\Lambda_{pi}\nu^p),$$

$$\tilde p_{\alpha,n+1}=-(a_{\alpha\beta}\nu^\beta+\Lambda_{p\alpha}\nu^p+M_{i\alpha}\nu^i),\quad \tilde p_{n+1,n+1}=2(M_{i\alpha}\nu^i\nu^\alpha+ \tag{9}$$
$$+\Lambda_{pi}\nu^p\nu^i+\Lambda_{p\alpha}\nu^p\nu^\alpha)+a_{pq}\nu^p\nu^q+a_{ij}\nu^i\nu^j+a_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta.$$

Отметим, что поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик (8) определяется в первой дифференциальной окрестности образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения. Действительно, если в охватах (9) взять в качестве нормали $\{\nu^p\}$ аффинную нормаль $\{\mathcal{L}^p\}$, то поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик (8) определяется в первой дифференциальной окрестности.

Поле соприкасающихся гиперквадрик (6) определяется во второй дифференциальной окрестности образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения.

4. Построенные гиперквадрики в силу того, что

$$A_{pq}=a_{pq},\quad A_{ij}=a_{ij},\quad A_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

являются соприкасающимися как по отношению к Λ-распределению, так и по отношению к $M\Lambda$-распределению и к Φ-распределению. Доказаны следующие теоремы:

1. Для того, чтобы гиперквадрика Q_n имела касание второго порядка с кривыми, принадлежащими H-распределению, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (10) и следующие:

$$A_{pi} = A_{p\alpha} = A_{i\alpha} = A_{ip} = A_{\alpha p} = A_{\alpha i} = 0 .$$

З а м е ч а н и я: 1) если гиперквадрика Q_n имеет касание второго порядка с кривыми, принадлежащими H-распределению, то она имеет касание второго порядка с любой кривой Λ-распределения, $M\Lambda$-распределения, M-распределения и Φ-распределения; 2) если гиперквадрика Q_n имеет касание второго порядка с кривыми, принадлежащими M-распределению, то она имеет касание второго порядка с любой кривой Λ-распределения и $M\Lambda$-распределения.

2. Если в уравнениях гиперквадрики Q_n положить

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (B_{ij} + B_{ji}) , \qquad (11)$$

то квадрика будет соприкасающейся только с кривыми, принадлежащими Λ-распределению, и с кривыми, принадлежащими Φ-распределению, где величины B_{ij} определены формулами (2).

3. Если в уравнениях гиперквадрики Q_n положить

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha}) \qquad (12)$$

или

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (K_{\alpha\beta} + K_{\beta\alpha}) , \qquad (13)$$

то получим квадрику, имеющую касание второго порядка только с кривыми, принадлежащими Λ-распределению и $M\Lambda$-распределению. Величины $B_{\alpha\beta}$ и $K_{\alpha\beta}$ определены формулами (3) и (1) соответственно.

4. Если в уравнении квадрики Q_n положить одновременно (11) и (12) или (13), то квадрика имеет касание второго порядка только с кривыми, принадлежащими Λ-распределению.

5. Гиперквадрика Q_n имеет касание второго порядка только с кривыми, принадлежащими $M\Lambda$-распределению, если в ее уравнении положить (12) и

$$A_{pq} = \frac{1}{2} (\ell_p N_q + \ell_q N_p) , \qquad (14)$$

где величины ℓ_p и N_q определены формулами (4), (5).

6. Гиперквадрика Q_n имеет касание второго порядка только с кривыми, принадлежащими Φ-распределению, если в ее уравнении положить (11), (14).

Библиографический список

1. Г р е б е н ю к М.Ф. Поля геометрических объектов трехсоставного распределения аффинного пространства A_{n+1} // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.21-24.

2. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

3. Ю ш к е в и ч Т.Н. К геометрии аффинного трехсоставного распределения $H(M(\Lambda))$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып.17. С.114-117.

УДК 513.75

О ТИПАХ ТОЧЕК ПОДМНОГООБРАЗИЙ МНОГООБРАЗИЯ ПОЧТИ КАСАТЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Р.Ф.Д о м б р о в с к и й

(Черновицкий государственный университет)

Предлагается классификация подмногообразий многообразия почти касательной структуры по типу точек, инвариантному относительно допустимых преобразований локальных координат.

1. Вещественное дифференцируемое многообразие M_{2n} класса C^∞ называется многообразием почти касательной структуры, если на нем задано поле тензора Q типа (1,1), присоединенного к дифференциальной группе $\mathcal{D}^1_{2n}$ [1], [2] и удовлетворяющего соотношениям

$$Q^2 = 0 , \qquad (1)$$

$$\operatorname{rang} Q = n . \qquad (2)$$

4 Зак. 2305